the Complex number

$Z = x + iy$

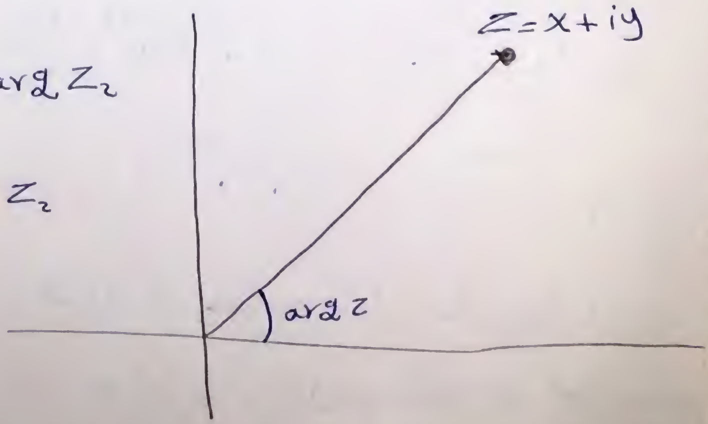
⋮

---

③ argument of Complex

← هي الزاوية المحصورة بين الخط الواصل بين نقطة الأصل ومحور السينات وخواص هذه الحالة مثل خواص اللوغاريتمات

(ضرب جوه جمع بره والقسمة جوه وطرح بره وهات عليها واطرح)



① $\arg(Z_1 Z_2) = \arg Z_1 + \arg Z_2$

② $\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg Z_1 - \arg Z_2$

③ $\arg Z^n = n \arg Z$

$\arg Z = \tan^{-1} Z$

$\boxed{Ex}$ find modulus and argument for

ⓐ $\dfrac{(1+i)^3}{(-1-i)^2\,(1-i)^4}$ ⓑ $\dfrac{(1+i)^3}{(2+5i)\,(3+6i)^2}$

a)

→ modulus

$$\left|\frac{(1+i)^3}{(-1-i)^2(1-i)^4}\right| = \frac{|(1+i)^3|}{|(-1-i)^2(1-i)^4|} = \frac{|1+i|^3}{|-1-i|^2\,|1-i|^4}$$

$x=1$ $y=1$

$x=-1$ $y=-1$ $x=1$ $y=-1$

$$= \frac{(\sqrt{2})^3}{(\sqrt{2})^2\,(\sqrt{2})^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

argument

$\tan^{-1}\frac{-1}{1} =$, $\tan^{-1}\frac{1}{-1} =$, $\tan^{-1}\frac{-1}{-1} =$

$\tan\frac{1}{1} =$

← نلاحظ أنه الآن لا تحسب سعة العدد المركب بطريقة خاطئة وذلك لعدم التمييز بين الإشارة هل هي مع y أم x ولحل هذه المشكلة نحدد الإشارات ونحسب $(\tan^{-1})$ ونحدد ربع الزاوية من قيمة y ، x

لو كانت في الربع الثاني ⟸ $\pi - \theta$ ، الربع الثالث $\pi + \theta$

أما إذا كانت الربع الأول أو الرابع نضع القيمة كما هي

Lec 1

$$\arg\left(\frac{(1+i)^3}{(-1-i)^2(1-i)^4}\right)$$

$$= \arg(1+i)^3 - \arg\left[(-1-i)^2(1-i)^4\right]$$

$$= 3\arg(1+i) - 2\arg(-1-i) - 4\arg(1-i)^4$$

الربع الأول $x=1$ $y=1$; $x=-1$, $y=-1$ الثالث $\tan^{-1}\frac{1}{1}$; $x=1$ $y=-1$ الربع الرابع $\tan^{-1}\frac{1}{-1}=-45$

$$= 3\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) - 4\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$\boxed{Ex}$ if $|z| = 2$ show that $2 \leqslant |z-4| \leqslant 6$

$|z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ ← نستخدم

$|z-4| \leqslant |z| + |4| = 2 + 4$

$|z-4| \leqslant 6 \longrightarrow (1)$

We use ⇒ $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 \pm z_2|$ ←

$|z-4| = |-(4-z)| = |4-z|$

$$|4| - |z| \leq |4 - z|$$
$$\quad\;\; \downarrow$$
$$\quad\;\; 2$$

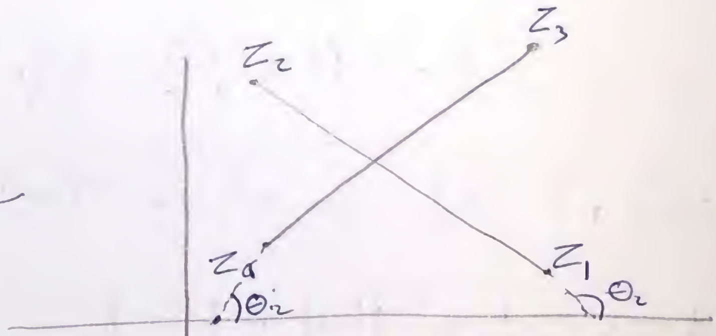
$$2 \leq |z - 4| \longrightarrow (2)$$

من ١ ، ٢ ينتج المطلوب

$\boxed{\text{EX:3}}$ Prove that if the line Joining the points z_1, z_2 and z_3, z_4 are pependicular iff then the

متعامدين

$$\underbrace{Re}_{Real}\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right) = 0$$



عايز أثبت إنهم متعامدين لو تحقق الشرط المكتوب فوق.

$$\arg(z_1 - z_2) = \theta_1$$

$$\arg(z_3 - z_4) = \theta_2$$

$$\theta_1 = \theta_2 + \frac{\pi}{2}$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg(z_1 - z_2) - \arg(z_3 - z_4) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg\left(\frac{Z_1-Z_2}{Z_3-Z_4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

أي أن $\frac{Z_1-Z_2}{Z_3-Z_4}$ تقع على محور y

$$\therefore Re\left(\frac{Z_1-Z_2}{Z_3-Z_4}\right)=0$$

ممكن توضح

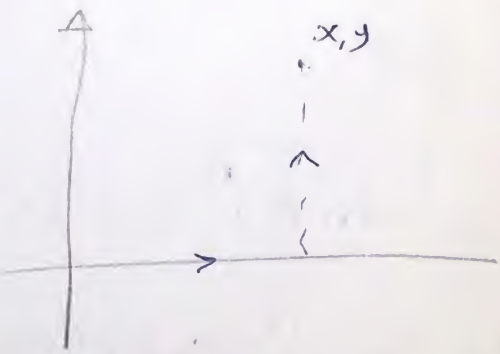
ممكن توضح المسألة بالعكس لكن نثبت أن $Re=0 \Leftarrow$ الخطان متعامدان

* Polar Form of Complex number:-

- لو عايز أوصل للنقطة (x, y)

فنحدد بعد ونمشي (Qartizium)

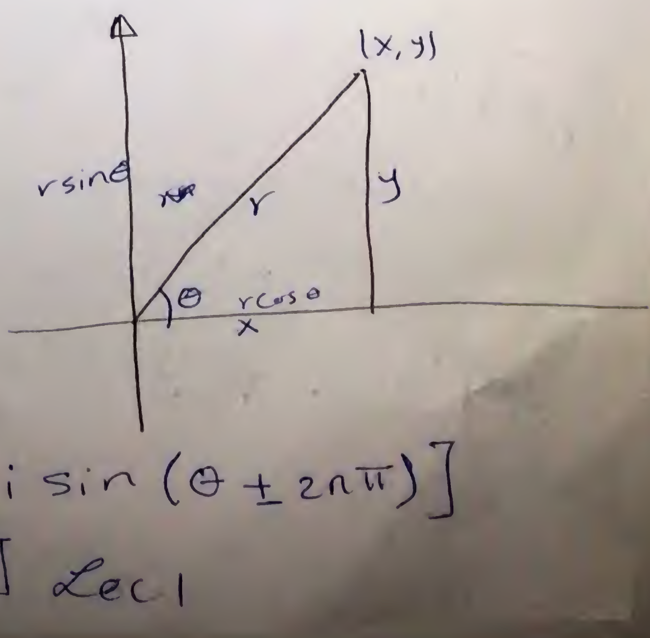
أو نحدد زاوية ونمشي طول (Polar)



$r=|z|$, $\theta=\arg z$

$Z=x+iy$

$$Z=r\left[\cos(\theta+2n\pi)+i\sin(\theta+2n\pi)\right]$$



$$Z=r\left[\cos(\theta\pm 2n\pi)+i\sin(\theta\pm 2n\pi)\right]$$

$$e^{i(\text{أى حاجة})} = \cos(\text{أى حاجة}) + i\sin(\text{أى حاجة})$$

$$Z = r\,e^{i(\theta \pm 2n\pi)} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

→ De Mouver theorem

$$Z = e^{i\theta} \rightarrow Z = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$Z^n = e^{in\theta}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

⇒ Roots of Complex number :-

$$\sqrt[n]{x+iy}$$

ـــ لكى نوجد فكرة ايجاد الجذر لأى عدد مركب نحتاج لفكرة
تحويل المجمع ع (x, y) إلى ضرب فنستخدم (r, θ)

$$\cancel{(x+iy) = r\,\theta}$$

$$x+iy = r\,e^{i(\theta \pm 2K\pi)}$$

$$(x+iy)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(\frac{\theta \pm 2K\pi}{n}\right)}$$

$$(x+iy)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)\right]$$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$K = 0, 1, \dots, n-1$ K ← تحدد عدد الحدود.

Ex: Find the roots of $\sqrt[3]{1+i}$

Sol

$$(1+i)^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2K\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2\pi K}{3}\right)\right]$$

$K = 0, 1, 2$, $x = 1$, $y = 1$

$r = \sqrt{2}$ $\theta = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$

$$(1+i)^{\frac{1}{3}} = (2)^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2K\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi K}{3}\right)\right]$$

$K=0$

$$Z_0 = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right] =$$

$K=1$

$$Z_1 = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] =$$

$K=2$

$$Z_2 = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right]$$

$\boxed{8}$ Lec 1